7 Razão e Proporção

1. *Razão* de dois números *a* e *b*, b ≠ 0, é o quociente $\frac{a}{b}$ ou a : b. (Lê-se *a* está para *b*)

SÉRIE I

Qual a razão de:

1) 12km e 24 000m?
2) 0,7kg e 210dag?
3) 60km/h e 40km/h?
4) $80m^3$ e $120m^3$?

Exemplo: 15km e 45 000m?

Devemos ter:

$$\frac{15km}{45000m} = \frac{15000m}{45000m} = \frac{15000}{45000} = \frac{1}{3}$$

SÉRIE II

Calcular a razão:

1) $\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}} =$

2) $\frac{2\times\frac{1}{4}}{1:\frac{2}{3}} =$

3) $\frac{0{,}2+1{,}3}{3\times 0{,}4} =$

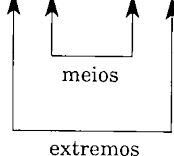
4) $\frac{\sqrt{4}}{1-0{,}4} =$

Exemplo: $\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}}$

$$\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}:\frac{3}{2} = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

2. *Proporção* é a igualdade de duas razões.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **ou a : b = c : d, b ≠ 0 e d ≠ 0**

(b e c: meios; a e d: extremos)

Propriedade fundamental:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

SÉRIE III

Exercícios

Escreva em forma de proporção:

1) 3 × 4 = 2 × 6
2) 4 × 9 = 6 × 6
3) x · y = a · b, onde x, y, a e b não são nulos.

Exemplo: 3 × 10 = 5 × 6

Devemos ter as seguintes possibilidades:

1ª) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

2ª) $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ (alternando os meios)

3ª) $\frac{10}{5} = \frac{6}{3}$ (alternando os extremos)

4ª) $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ (invertendo as razões)

5ª) $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

6ª) $\frac{5}{10} = \frac{3}{6}$

7ª) $\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$

8ª) $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

(5ª a 8ª) **Transpondo as quatro primeiras proporções**

> **Nota**
>
> Fora destas (8) disposições, não se terá proporção que *satisfaça* a igualdade dos produtos: 3 × 10 = 5 × 6.

Proporção contínua **é aquela cujos meios ou extremos são iguais.**

Exemplo: $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$ **ou** $\frac{6}{9} = \frac{4}{6}$

SÉRIE IV

Escrever uma proporção contínua com os números:

1) 4, 8 e 16
2) 1, $\sqrt{5}$ e 5

Exemplo: 3, 6 e 12

Devemos ter as seguintes possibilidades básicas:

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} \text{ ou } \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$

SÉRIE V

Calcular o valor de x (4ª proporcional) em cada proporção:

1) $\frac{4}{6} = \frac{x}{3}$

2) $\frac{15}{x} = \frac{10}{2}$

3) $\frac{6}{21} = \frac{2}{x}$

Exemplo: $\frac{x}{4} = \frac{6}{8}$

$$\frac{x}{4} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow 8 \cdot x = 4 \cdot 6 \therefore x = \frac{24}{8} \therefore x = 3$$

SÉRIE VI

Calcular o valor de x em cada proporção:

1) $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}}$

2) $\frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{x}{1 + \frac{1}{3}}$

3) $\frac{2x}{\frac{3}{4}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}}$

4) $\frac{x}{1,2} = \frac{0,6}{0,2}$

Exemplo: $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}}$

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \therefore \frac{3x}{4} = \frac{2}{21} \therefore$$

$$\therefore x = \frac{8}{63}$$

SÉRIE VII

Calcular o valor de x em cada proporção:

1) $\frac{x}{9} = \frac{4}{x}$

2) $\frac{2}{x} = \frac{x}{32}$

3) $\frac{12}{x} = \frac{x}{3}$

4) $\frac{x}{5} = \frac{1}{x}$

Exemplo: $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$

$$\frac{x}{4} = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x \cdot x = 4 \cdot 16 \therefore x^2 = 64$$

$\therefore$ **x = ±8, ou seja, x = 8 ou x = −8**

SÉRIE VIII

Calcular o valor de x em cada expressão:

1) $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

2) $\frac{1}{x} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$

3) $\frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{x}$

4) $\frac{1}{20} = \frac{1}{30} + \frac{1}{x}$

Exemplo: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Devemos ter:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3+2}{6} \therefore \frac{1}{x} = \frac{5}{6} \therefore$$

$$\therefore 5x = 6 \cdot 1 \therefore x = \frac{6}{5}$$

Propriedades das proporções

Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

P.1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ **ou** $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

P.2) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ **ou** $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

SÉRIE IX

Resolver os problemas:

1) A razão de dois números é $\frac{1}{3}$. Achar esses números sabendo que a soma deles é 16.

2) A razão das idades de duas pessoas é $\frac{2}{3}$. Achar essas idades sabendo que a soma delas é 35 anos.

3) A razão das medidas de dois segmentos é $\frac{3}{5}$. Achar essas medidas sabendo que a soma delas é 32 cm.

4) A razão das áreas de duas figuras é $\frac{4}{7}$. Achar essas áreas sabendo que a soma delas é 66 cm².

Exemplo: A razão de dois números é $\frac{2}{3}$. Achar esses números sabendo que a soma deles é 15.

Resolução:

Sejam x e y os números procurados, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \text{ e } x + y = 15$$

Aplicando a P.1, vem:

$$\frac{x+y}{y}=\frac{2+3}{3} \Rightarrow \frac{15}{y}=\frac{5}{3} \therefore y=\frac{15\times 3}{5}=9$$

e

$$\frac{x+y}{x}=\frac{2+3}{2} \Rightarrow \frac{15}{x}=\frac{5}{2} \therefore x=\frac{15\times 2}{5}=6$$

Resp.: Os números são 6 e 9.

SÉRIE X

Resolver os problemas:

1) A diferença de dois números é 12 e a razão é $\frac{2}{5}$. Achar esses números.

2) A diferença das idades de duas pessoas é 20 anos e a razão é $\frac{4}{9}$. Quais são as idades?

3) A diferença das medidas de dois ângulos é 60° e a razão é $\frac{2}{5}$. Quais são as medidas dos ângulos?

4) A diferença dos volumes de dois sólidos é $9\,cm^3$ e a razão é $\frac{2}{3}$. Achar os volumes.

Exemplo: A diferença de dois números positivos é 21 e a razão é $\frac{1}{4}$. Achar esses números.

Resolução:

Sejam x e y os números procurados, temos:

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{4} \text{ e } y-x=21 (y>x)$$

Aplicando a P.2, vem:

$$\frac{y-x}{y}=\frac{4-1}{4} \Rightarrow \frac{21}{y}=\frac{3}{4} \therefore$$

$$\therefore y=\frac{21\times 4}{3}=28 \text{ e}$$

$$\frac{y-x}{x}=\frac{4-1}{1} \Rightarrow \frac{21}{x}=\frac{3}{1} \therefore$$

$$\therefore x=\frac{21\times 1}{3}=7$$

Resp.: Os números são 7 e 28.

Propriedades das proporções

Dada a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, temos:

P.3) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ **ou** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$

Dada uma série de razões iguais:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\ldots$, **temos:**

P.4) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots\ \frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}$

SÉRIE XI

Resolva os problemas:

1) A soma de três números é 90. Achar esses números sabendo que eles são proporcionais aos números 3, 5 e 7.

2) A soma das medidas dos lados de um triângulo é 48cm. Achar os lados desse triângulo sabendo que as medidas dos lados são proporcionais aos números 3, 4 e 5.

3) As medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo são proporcionais aos números 3, 7 e 8. Achar essas medidas.
Sugestão: A soma das três medidas é 180°.

4) Uma circunferência é dividida em três arcos, cujas medidas em graus são proporcionais aos números 4, 6 e 8. Achar essas medidas.
Sugestão: A soma das três medidas é 360°.

Exemplo: A soma de três números é 180. Achar esses números sabendo que eles são proporcionais aos números 4, 5 e 6.

Resolução:

Sejam x, y e z os números procurados, temos: x + y + z = 180 e $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$.

Aplicando a P.4, vem:

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}=\frac{x+y+z}{4+5+6}=\frac{180}{15}=\frac{12}{1}$$

Daí, $\frac{x}{4}=\frac{12}{1} \therefore x=48$

$$\frac{y}{5}=\frac{12}{1} \therefore y=60$$

$$\frac{z}{6}=\frac{12}{1} \therefore z=72$$

Resp.: Os números são 48, 60 e 72.